Nombres complexes.

A. Présentation.

Définition : Un nombre complexe est un nombre de la forme a + ib où a et b sont deux nombres réels et i un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Les nombres complexes interviendront cette année en Analyse pour la résolution d'équations différentielles et sont utilisés en électricité et en électronique.

B. Forme algébrique d'un nombre complexes.

Théorème et définitions :

Tout nombre complexe Z peut s'écrire sous la forme z = a+ ib

Cette écriture est la forme algébrique de z :

Le réel a s'appelle la partie réelle de z noté Re(z).

Le réel b s'appelle la partie imaginaire de z noté Im(z).

Remarques :

- z est un nombre réel si et seulement si Im(z) = 0.
- z est un nombre imaginaire pur si et seulement si Re(z) = 0.

B.1. Égalité de deux nombres complexes.

Propriété : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarque : En particulier, z = 0 si et seulement si Re(z) = 0 et Im(z) = 0.

B.2. Conjugué d'un nombre complexe.

Définition : Pour tout nombre complexe z de la forme a + ib , le conjugué de z est le nombre complexe a – ib noté $\overline{z}$.

Exemples : Le conjugué de $z_1 = 5 + 2i$ est $\overline{z_1} = 5 - 2i$.

Le conjugué de $z_2 = -4 - 3i$ est $\overline{z_2} = -4 + 3i$.

B.3. Calculs avec les nombres complexes.

Définitions : Soit k un nombre réel, z et z' deux complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

- La somme de z et z' est le complexe $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.
- Le produit de k par z est le complexe $kz = (ka) + i(kb)$.
- Le produit de z par z' est le complexe $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$
- Pour calculer l'inverse de z' noté $\frac{1}{z'}$ et le quotient de z par z' noté $\frac{z}{z'}$ on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur z'

Exemples : Soient $z = -1 + 2i$ et $z' = 2 - 5i$ deux nombres complexes.

Calculer : $z + z'$, $z \times z'$, $2z$, $-3z'$, $\frac{1}{z}$ et $\frac{z}{z'}$

- $z + z' = (-1 + 2i) + (2 - 5i) = (-1 + 2) + (2 - 5)i = 1 - 3i$.
- $zz' = (-1 + 2i)(2 - 5i) = -2 + 5i + 4i - 10i^2 = 8 + 9i$.
- $2z = 2(-1 + 2i) = -2 + 4i$
- $-3z' = -3(2 - 5i) = -6 + 15i$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{-1 + 2i} = \frac{-1 - 2i}{(-1 + 2i)(-1 - 2i;)} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
- $\frac{z}{z'} = \frac{-1 + 2i}{2 - 5i} = \frac{(-1 + 2i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = -\frac{12}{29}$.

B.4. Propriétés du conjugué d'un nombre complexe.

Propriétés : Pour tout nombres complexes z et z' tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- Avec $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$
- Avec $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

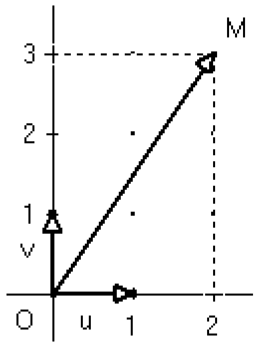
Exemples : Soient $z_1 = (4 + i\sqrt{3})(1 - i)$ et $z_2 = \frac{2 + i}{i - 3}$ deux nombres complexes

Écrire, sous forme algébrique, le nombre complexe conjugué de z_1 et z_2.

$$\overline{z_1} = \overline{(4 + i\sqrt{3})(1 - i)} = \overline{4 + i\sqrt{3}} \times \overline{1 - i} = (4 - i\sqrt{3})(1 + i) = 4 - i\sqrt{3} + 4i + \sqrt{3} = (4 + \sqrt{3}) + i\,(4 - \sqrt{3})$$

$$\overline{z_2} = \overline{\frac{2 + i}{i - 3}} = \frac{\overline{2 + i}}{\overline{i - 3}} = \frac{2 - i}{-3 - i} = \frac{(2 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \frac{-6 + 2i + 3i - i^2}{10} = \frac{-5 + 5i}{10} = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}$$

C. Représentation graphique des nombres complexes.



Définition :

Le nombre complexe $z = a + ib$ est **l'affixe** du point $M(a , b)$ ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (a , b) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} , \vec{v})$.

$M(a , b)$ est **le point image** du nombre complexe $z = a + ib$.

$\overrightarrow{OM}$ (a , b) est **le vecteur image** du nombre complexe $z = a + ib$.

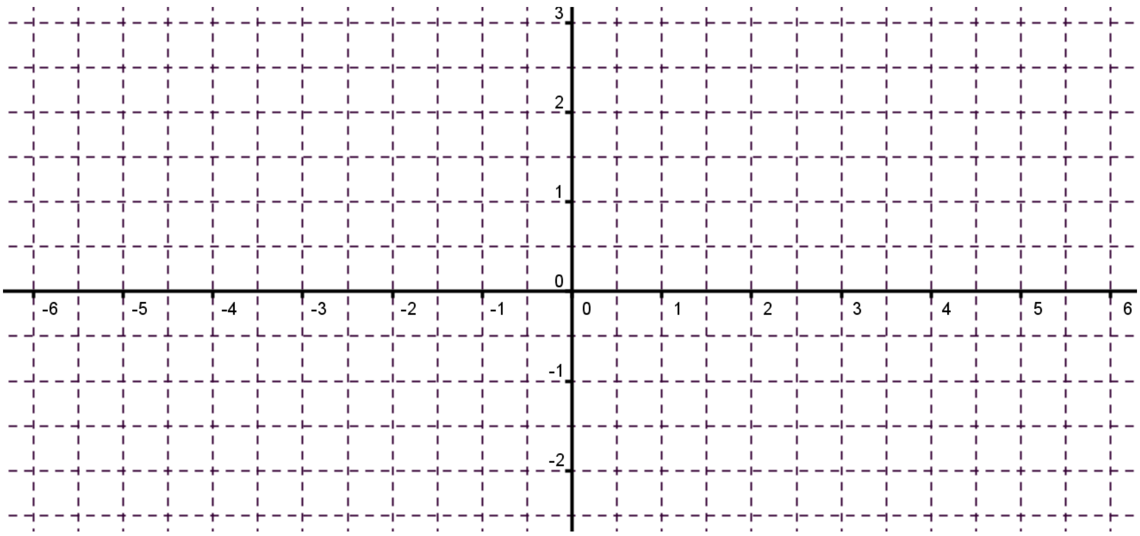
Remarques :

- $M(a + ib)$ se lit « le point M d'affixe $a + ib$.
- Un nombre réel est l'affixe d'un point de l'axe des abscisses.
  Un nombre imaginaire pur est l'affixe d'un point de l'axe des ordonnés

Exemples : Placer dans le repère orthonormal $(O ; \vec{u} , \vec{v})$ ci-dessous, les points d'affixes :

$z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$, $z_E = 1 + i$, $z_F = 1 - i$, $z_G = -1 - i$, $z_H = -1 + i$,

$z_J = -3 + 3i$, $z_K = -2i$, $z_L = 2 + i$, $z_M = 3$, $z_N = 5 + 2i$, $z_P = -2{,}5i + 5$.



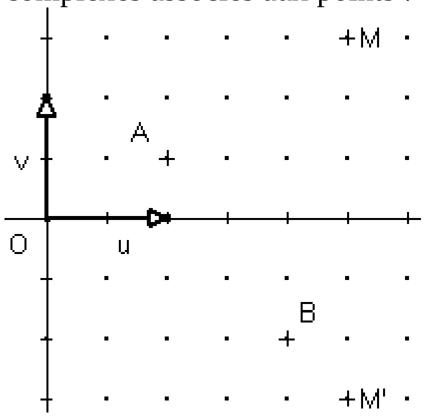
Remarques:

- Les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses sont conjuguées.

- Considérons les points : $A(x_A ; y_A)$ d'affixe $z_A = x_A + i\, y_A$, $B(x_B ; y_B)$ d'affixe $z_B = x_A + i\, y_B$ et $M'(x_{M'} ; y_{M'})$ d'affixe $z_{M'} = x_{M'} + i\, y_{M'}$

  A, B M' alignés équivaut à: $z_{M'} - z_A = k(z_B - z_A)$

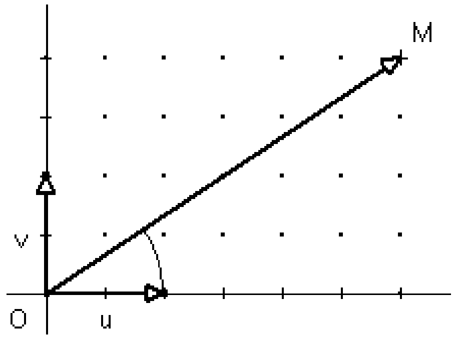
Écrire entre parenthèses les complexes associés aux points :



D. Forme trigonométrique des nombres complexes.

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$; le point M est entièrement défini par :



- sa distance à l'origine O du repère, r, appelée module de z et notée $|z|$.
- une mesure quelconque θ de l'angle $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)$ appelée argument de z et notée $\arg(z)$.

La forme trigonométrique de z est : $z = r[\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)] = [r\ ,\ \theta]$.

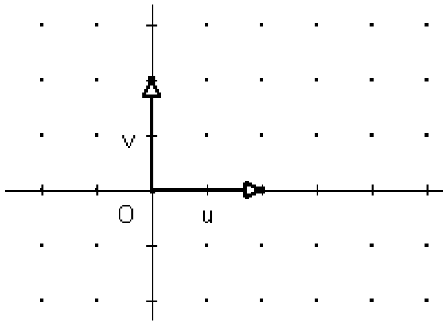
Exemple : Écrire le complexe $z = 1 - i$ sous forme trigonométrique :

On place le point $M(1\ ;\ -1)$ image du complexe z.

En utilisant le théorème de Pythagore on obtient $OM = \sqrt{2}$

En observant la figure on constate que $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

La forme trigonométrique de z est $z = \left[\sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]$



Rappels :

Angle (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Angle (en degré)	0	30	45	60	90	180
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

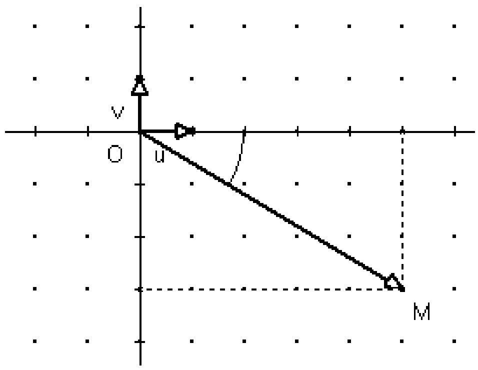
D.1. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement :

Théorème :

Soit z un nombre complexe non nul.

- si $z = a + ib$ alors $\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta \text{ tel que } \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$
- si $z = [r\ ,\ \theta] =$ alors $z = r[\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)] = r\cos(\theta) + i\ r\sin(\theta)$

  et par conséquent $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$.



Exemples : Soit $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Écrire z_1 sous la forme trigonométrique et z_2 sous la forme algébrique.

- $|z_1| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ donc $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$

  donc $z_1 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$

- $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\ 2\cos\frac{5\pi}{4} + i\ 2\sin\frac{5\pi}{4} = 2 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \times 2 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

D.2. Calculs avec la forme trigonométrique :

Théorème. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples : Soient $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Écrire $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_3}{z_4}$ Sous la forme trigonométrique

- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2 \times 3 = 6$

  $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  donc $z_1 \times z_2 = \left[6, -\frac{\pi}{12}\right]$

- $\left|\frac{z_3}{z_4}\right| = \frac{|z_3|}{|z_4|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

  $\arg\left(\frac{z_3}{z_4}\right) = \arg(z_3) - \arg(z_4) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  donc $\frac{z_3}{z_4} = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$.

E. Forme exponentielle d'un nombre complexes.

Notations :

Pour tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ, on écrira $z = re^{i\theta}$.

Cette écriture est appelée **forme exponentielle de *z***.

Règles de calculs : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

- $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r \times r' \times re^{i\theta} \times e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta + i\theta'} = rr'e^{i(\theta + \theta')}$
- $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{r'} e^{-i\theta'}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$

Exemples : Soient $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = -1 + i$.
Écrire z, z' et zz' sous la forme trigonométrique et sous la forme exponentielle.

- $|z| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$; $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

donc $z = \left[2 , \dfrac{\pi}{6}\right] = 2\, e^{i\pi/6}$

- $|z'| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; $\left.\begin{array}{l} \cos\theta' = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$ donc $\theta' = \dfrac{3\pi}{4}$.

donc $z' = \left[\sqrt{2} , \dfrac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$

- $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

donc $zz' = \left[2\sqrt{2} , \dfrac{11\pi}{12}\right]$

$zz' = rr'e^{i(\theta + \theta')} = 2 \times \sqrt{2} \times e^{i(\pi/6 + 3\pi/4)} = 2\sqrt{2}\, e^{11i\pi/12}$

F. Formule de Moivre – Formule d'Euler.

F.1. Formule de Moivre.

Théorème : Soit θ un nombre réel et n un entier naturel $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Rappels : Binôme de Newton et triangle de Pascal

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$	1 1
$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = 1 \times a^4 + 4 \times a^3b + 6 \times a^2b^2 + 4 \times ab^3 + 1 \times b^4$	1 4 6 4 1

Exemple : Exprimer cos 3x et sin 3x en fonction de cos x et sin x.

On sait que $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$

$$= (\cos x)^3 + 3(\cos x)^2 \times i\sin x + 3(\cos x) \times (i\sin x)^2 + (i\sin x)^3$$

$$= \cos^3 x + 3\, i \cos^2 x \sin x + 3\, i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + (3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)i$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \qquad \text{et} \qquad \sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

F.3 formules d'Euler.

Théorème : Soit θ un nombre réel. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Remarque : Ces formules permettent de linéariser un produit de polynômes trigonométriques c'est-à-dire de le transformer en une somme de termes de la forme cos $n\theta$ ou sin $n\theta$.

Application : Linéariser le polynôme trigonométrique $P(x) = \cos^3 x - \sin^2 x + 2$

- $$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3}{2^3} = \frac{1}{8} \times (e^{3ix} + 3e^{2ix}\, e^{-ix} + 3e^{ix}\, e^{-2ix} + e^{-3ix})$$

$$= \frac{1}{8} \times [e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix}\, e^{-ix}\,(e^{ix} + e^{-ix})] = \frac{1}{4} \times \left[\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right] = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

- $$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2}{(2i)^2} = -\frac{1}{4}(e^{2ix} - 2e^{ix}\, e^{-ix} + e^{-2ix}) = -\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} - 1\right] = -\frac{1}{2}(\cos 2x - 1).$$

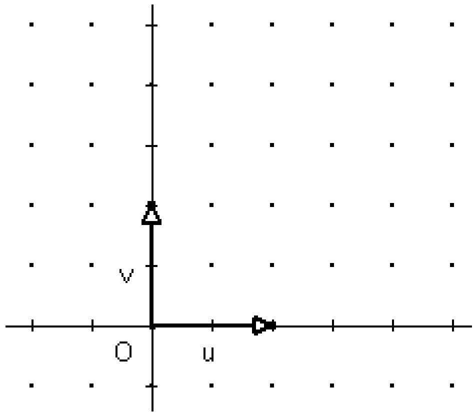
- $$P(x) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$$

G. Lignes de niveaux.

Définition : f étant une fonction définie sur l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$ et à valeurs dans IR

On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble des points du plan dont l'affixe vérifie : $f(z) = k$.

G.1. Lignes de niveau *k* de la fonction $f : z \to \text{Re}(z)$.

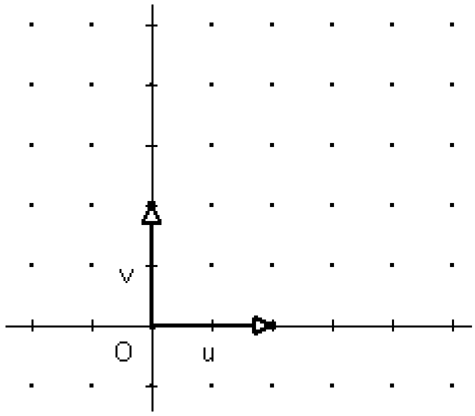


Propriété.

Les lignes de niveau k de la fonction $f : z \to \text{Re}(z)$ sont les droites verticales d'équation : $x = k$.

Applic. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $\text{Re}(z) = 1{,}5$.

G.2. Lignes de niveau *k* de la fonction $f : z \to \text{Im}(z)$.

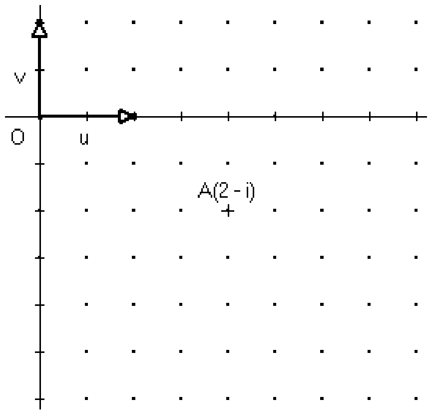


Propriété.

Les lignes de niveau k de la fonction $f : z \to \text{Im}(z)$ sont les droites horizontales d'équation : $y = k$.

Applic. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $\text{Im}(z) = 2$.

G.3. Ligne de niveau *k* de la fonction $f : z \to |z - a|$.



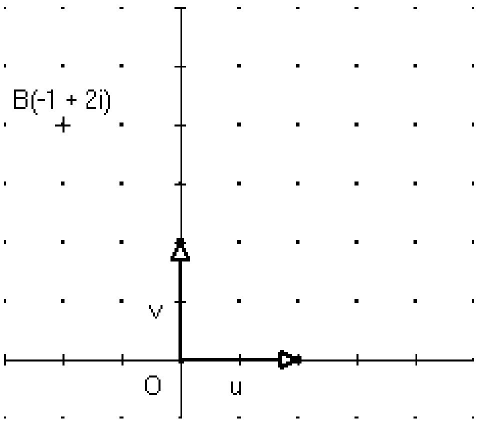
Propriété. Soit A le point d'affixe a et M le point d'affixe z.

$|z - a| = AM$

Les lignes de niveau k de $f : z \to |z - a|$ sont les cercles de centre A et de rayon k où k est un réel positif.

Applic. Représenter l'ensemble des points tels que $|z - z_a| = 2$

G.4. Ligne de niveau *k* de la fonction $f : z \to \arg(z - a)$.



Propriété. Dans le repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ les lignes de niveau k de $f : z \to \arg(z - a)$ sont les demi-droites issues de A point image du complexe a privées du point A faisant l'angle k avec le vecteur $\vec{u}$.

Applic. Représenter l'ensemble des points tels que $\arg(z - z_b) = -\pi/6$