Variables aléatoires continues – Lois à densité.

A. Loi uniforme sur [*a* ; *b*]

Une variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $I = [a\ ;\ b]$ et de telle sorte que tous les nombres de l'intervalle I puisse être atteints de manière semblable (équiprobable).

On ne peut raisonner en attribuant une même probabilité (même très faible) à chaque élément de I : on ne pourrait pas avoir 1 comme somme des probabilités évènements élémentaires car il y a une infinité de réels dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$

On choisit une distribution de probabilité qui fasse en sorte que la probabilité que la variable aléatoire X prenne sa valeur dans l'intervalle $J = [\alpha\ ;\ \beta]$, inclus dans I, soit proportionnelle à l'amplitude de J.

Intervalle	Amplitude	Probabilité
$I = [a\ ;\ b]$	$b - a$	$p(X \in I) = 1$
$J = [\alpha\ ;\ \beta]$	$\beta - \alpha$	$p(X \in J)$

avec $p(X \in I) = p(a \leq X \leq b) = 1$ et $p(X \in J) = p(\alpha \leq X \leq \beta)$.

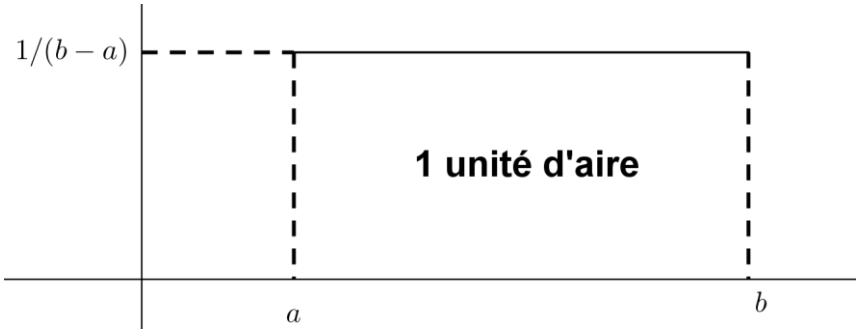
Ainsi :

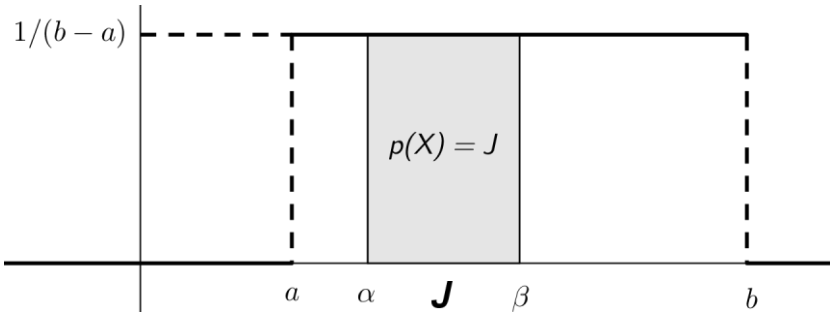
$p(X \in J) \times (b - a) = p(X \in I) \times (\beta - \alpha)$ {Les produits en croix sont égaux}

$p(X \in J) \times (b - a) = \beta - \alpha$ {car $p(X \in I) = 1$}

$$p(X \in J) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{1}{b - a} \times (\beta - \alpha) = \frac{1}{b - a} \times [t]_{\alpha}^{\beta}$$

$$p(X \in J) = \frac{1}{b - a} \times \int_{\alpha}^{\beta} 1\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b - a}\, dt$$





A.1. Définition.

La densité de la loi uniforme sur l'intervalle [a ; b] est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a\ ,\ b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarques importantes.

Soit X une variable aléatoire continue obéissant à une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [a ; b]
Soit x un réel.

- Dans tous les cas : $p(X = x) = 0$
- $\begin{cases} p(X \leq x) = 0 \text{ si } x \leq a \\ p(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a} \text{ si a} < x \leq b \\ p(X \leq x) = 1 \text{ si } x > b \end{cases}$

A.2. Espérance d'une loi uniforme sur $\mathcal{U}$ [a ; b].

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité de densité f sur [a ; b].

Définition : L'espérance de la variable aléatoire X notée $E(X)$ est définie par:

$$E(X) = \int_a^b x \times f(x)dx.$$

Remarque. Cette formule ressemble à la formule discrète $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p$i.

Dans le cas de la loi uniforme, on montre facilement que :

$$E(X) = \int_a^b x \times f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2} \quad \text{\{voir livre p 212\}}$$

A.3. Variance d'une loi uniforme sur $\mathcal{U}$ [a ; b].

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité de densité f sur [a ; b].

Définition : La variance de la variable aléatoire X notée $V(X)$ est définie par :

$$V(X) = \int_a^b [x - E(X)]^2 f(x)\,dx$$

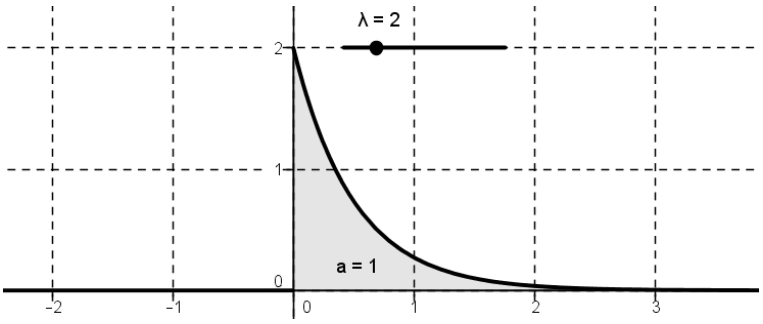
Dans le cas de la loi uniforme, on montre facilement que :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

B. Loi exponentielle.

Soit λ un réel positif ($\lambda > 0$).

Grâce au fameux logiciel Geogebra on constate facilement que pour la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ (avec } \lambda > 0), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.



B.1. Définition.

Quand la densité de la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X est définie

par : $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ (avec } \lambda > 0), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

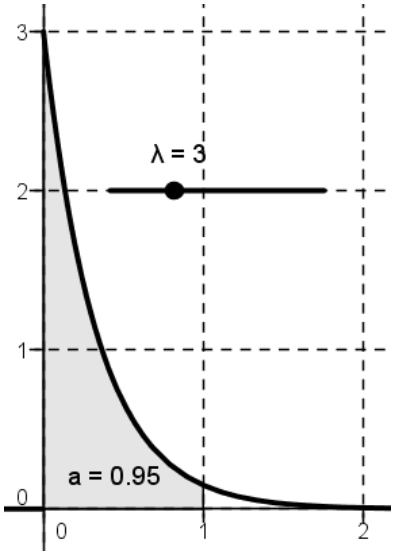
alors, on dit que la variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ.

La probabilité d'un évènement est alors donné par : $p(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx$.

Exemple.

La durée de vie en année d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$.

La probabilité que la durée de vie de ce composant soit inférieure à 1an représenté ci – contre.



Elle se calcule à l'aide d'une intégrale.

$$P(X < 1) = \int_0^1 3e^{-3x}\, dx = [-e^{-3x}]_0^1$$

$$= -e^{-3} + 1 \approx 0{,}95$$

B.2. Espérance d'une loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors son espérance est définie par : $E(X) = \int_0^{+\infty} x \times f(x)dx = \frac{1}{\lambda}$.

C. Loi normale.

C.1. La densité de la loi normale.

Quand un phénomène aléatoire dont la moyenne est m et l'écart type s, présente l'allure d'une courbe en cloche symétrique, on dit que ce phénomène peut être modélisé suit une loi normale de d'espérance $\mu = m$ et d'écart-type $\sigma = s$, notée :

$$\mathcal{N}(\mu\ ,\ \sigma)$$

Cela signifie que la courbe en cloche du phénomène peut être approchée par la courbe représentative de la densité f de la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ,\ \sigma)$.

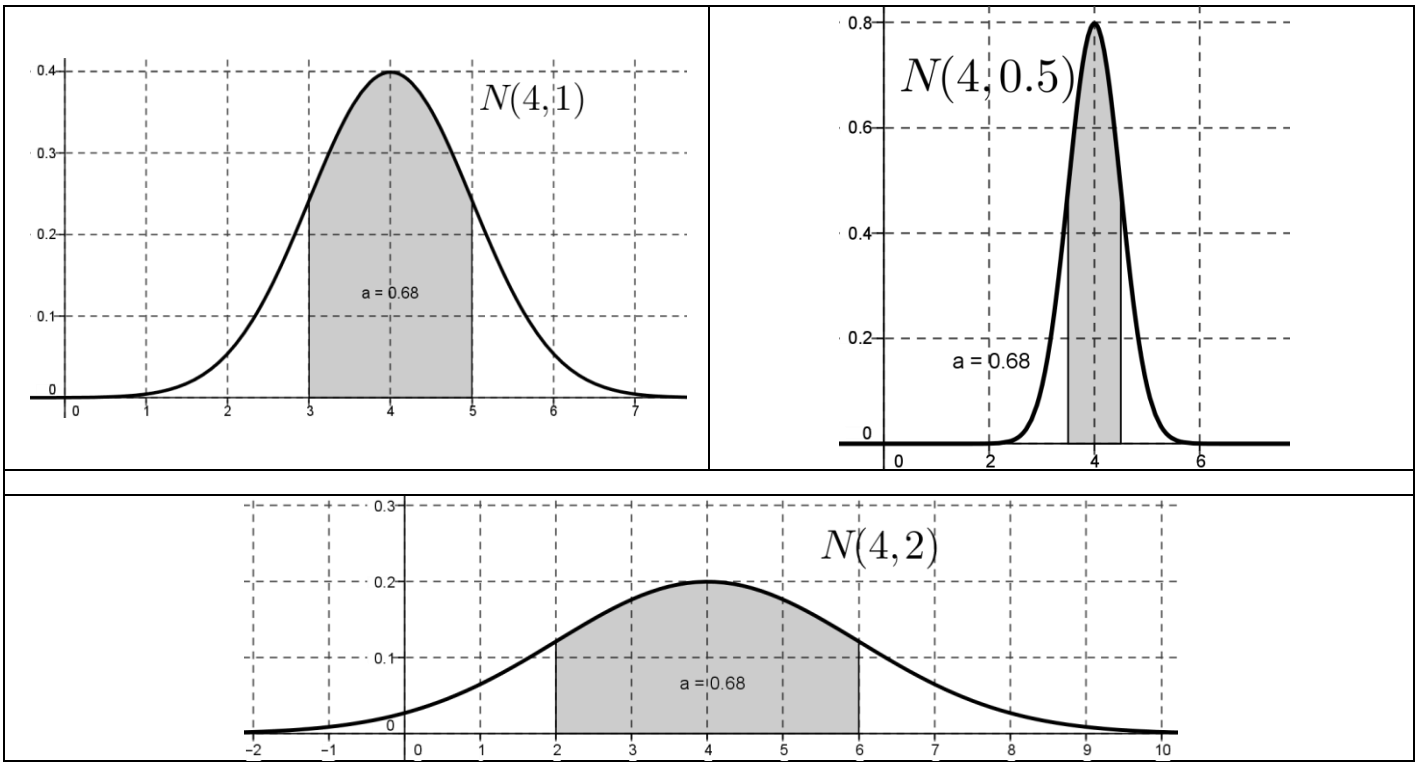
On dit que la variable aléatoire X qui mesure le phénomène considéré suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ,\ \sigma)$.

La densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ,\ \sigma)$ est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Bien sur, l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}f$ et l'axe des abscisses est 1.

Exemples.



On remarque que quelque soit l'espérance μ ou l'écart type σ : $p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68$.
De même : $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ et $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.

C.2. Approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Rappel. Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ alors son espérance est $E(X) = np$ et son écart type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}$.

Théorème.

Pour n assez grand ($n > 50$) et pour p ni voisin de 0 ni voisin de 1 tel que $npq > 10$, la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de même espérance et de même écart type, $\mathscr{N}\left(np\ ,\ \sqrt{np(1-p)}\right)$.

Exemple.

On lance 300 fois une pièce de monnaie truquée ce qui constitue une partie.

La probabilité d'obtenir « face » est $\frac{2}{3}$

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre de « face » obtenus.

1° Justifier que X suit une loi binomiale, en préciser les paramètres.

2° Peut-on calculer simplement $P\ (X > 210)$

1° La variable aléatoire X mesure le nombre de « face » obtenus.

- Pour chaque jet, on a deux résultats possibles.

  Ou bien on obtient « face », c'est un succès, la probabilité est alors $p = \frac{2}{3}$.

  Ou bien on obtient « pile », la probabilité est alors $q = 1 - p = \frac{1}{3}$.
- On lance 300 fois la pièce de manière indépendante.
- On peut donc conclure que x suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, avec $n = 300$ et $p = \frac{2}{3}$.

2° Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, avec $n = 300$ et $p = \frac{2}{3}$,

$$P\ (X > 210) = \sum_{i=210}^{300} C_{300}^{i} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \left(\frac{1}{3}\right)^{300-i}$$

La calculatrice ne peut pas effectuer un tel calcul.