Les suites numériques.

A. Suites ayant une limite infinie.

Comment déterminer à l'aide d'un algorithme, un seuil à partir duquel $u_n \geq 10^p$?

Activité. On considère la suite (u_n) définie par son terme général $u_n = n^2 - n$.

1° Utiliser la calculatrice pour obtenir u_{10^2}, u_{10^4}, u_{10^6}, $u_{10^{10}}$.

2° Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = x^2 - x$.
Montrer que la fonction f est croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

3° a) En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer un rang au-delà duquel tous les termes u_n , vérifient $u_n \geq 10\,000$.

b) Déterminer un rang au-delà duquel $u_n \geq 10^6$.

Définition. On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, lorsque pour tout entier naturel p, il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont supérieur à 10^p.

Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par : $u_n = 3n + 1$.
Cette suite à pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
En effet, pour tout nombre entier naturel p,

$$u_n \geq 10^p \Leftrightarrow 3n + 1 \geq 10^p \Leftrightarrow n \geq \frac{10^p - 1}{3}.$$

Donc, dès que n est plus grand que la valeur seuil $\dfrac{10^p - 1}{3}$, $u_n \geq 10^p$.

Vocabulaire. Lorsque (u_n) a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, on dit que u_n tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemples. La suite de terme général n^2 a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
La suite de terme général $\sqrt{n}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Définition. On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, lorsque pour tout entier naturel p, il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n vérifient : $u_n \leq -10^p$.

Exemple. La suite de terme général $-2n + 5$ a pour limite $-\infty$.

Vocabulaire. Lorsque (u_n) a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, on dit que u_n tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

B. Suites ayant une limite finie.

Activité : On considère la suite (u_n) définie par son terme général $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

1° Vérifier, en examinant les valeurs approchées des termes u_{10^2}, u_{10^4}, u_{10^6}, $u_{10^{10}}$, donnés par une calculatrice que la suite (u_n) semble avoir pour limite 2.

2° Montrer que pour tout entier naturel n, $| u_n - 2 | = \dfrac{7}{n+3}$.

3° Résoudre dans IN, l'inéquation $\dfrac{7}{n+3} \leq 0{,}001$.

En déduire l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes u_n sont à une distance inférieure à 0,001 du nombre 2.

4° Déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n, vérifient $| u_n - 2 | \leq 10^{-6}$.

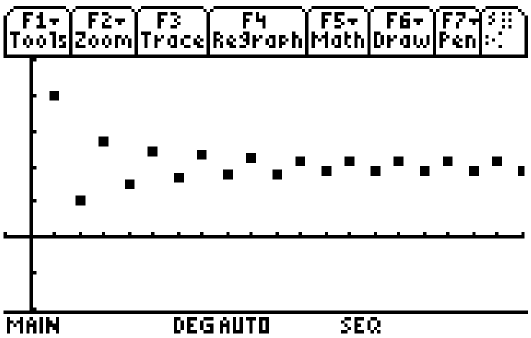
Définition. Soit ℓ un nombre réel. On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ en $+\infty$, Lorsque pour tout entier p, il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont à une distance de ℓ inférieure à 10^{-p}.

Remarque. $| u_n - \ell |$ est la distance entre u_n et ℓ.

Donc $| u_n - \ell | \leq 10^{-p} \Leftrightarrow \ell - 10^{-p} \leq u_n \leq \ell + 10^{-p}$,

et $| u_n - \ell | > 10^{-p} \Leftrightarrow u_n < \ell - 10^{-p}$ ou $u_n > \ell + 10^{-p}$.

Exemple. La suite de terme général $1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$ a pour limite 1.



Vocabulaire. Lorsque la suite (u_n) a pour limite ℓ en $+\infty$, on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Remarque : Une suite peut ne pas avoir de limite en $+\infty$ comme la suite de t.g. $(-1)^n$.

Exemples. La suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ a pour limite 0.

La suite de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ a pour limite 0.

La suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ a pour limite 0.

C. Suites géométriques.

Activité p 26 : Oscillations amorties.

Définition. Soit q un nombre réel.
On dit que la suite (u_n) est une **suite géométrique de raison q**,
lorsque pour tout nombre entier n, $u_{n+1} = qu_n$.

Exemple 1. La suite (d_n) de l'activité ci- dessus est une suite géométrique de raison 0,9.

Exemple 2. La suite de terme général $u_n = 3^n$ est une suite géométrique de raison 3.

Propriété. Une suite (u_n) de termes non nuls est une suite géométrique de raison q si et seulement si, pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

{Le rapport de deux termes consécutifs quelconques est constant}

Exemple 3. On place un capital C_0 sur un compte dont le taux de rémunération annuel est de 3%. Cela signifie que le taux de variation du capital entre deux années consécutives quelconques est de 3% et par conséquent que :

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n} = 3\% = 0{,}03$$

On montre ensuite facilement que $C_{n+1} = 1{,}03C_n$.

Propriétés. Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q :

- si le terme initial de la suite est u_0, pour tout entier n, $u_n = q^n\, u_0$;
- si le terme initial de la suite est u_1, pour tout entier n, $u_n = q^{n-1}\, u_1$.

Lire exercice résolu p 27.

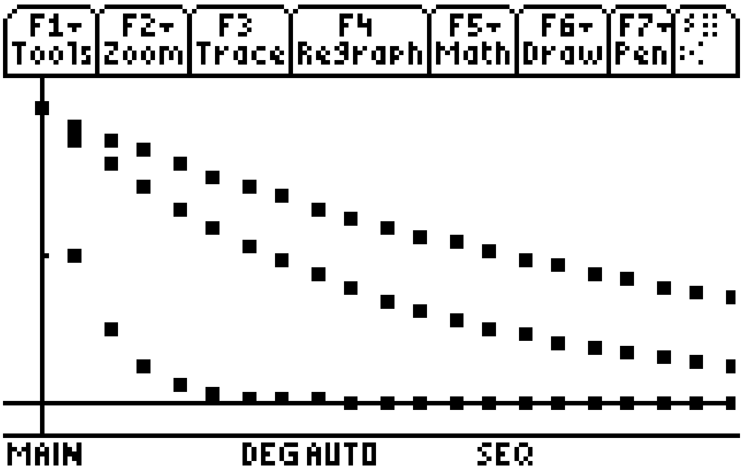
Faire applications 1 et 2 p 27.

D. **Limite d'une suite géométrique de raison positive**.

Activité p 28 : tout se joue autour de 1.

Propriétés. Considérons un nombre réel positif q.

- Si $0 \leq q \leq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.



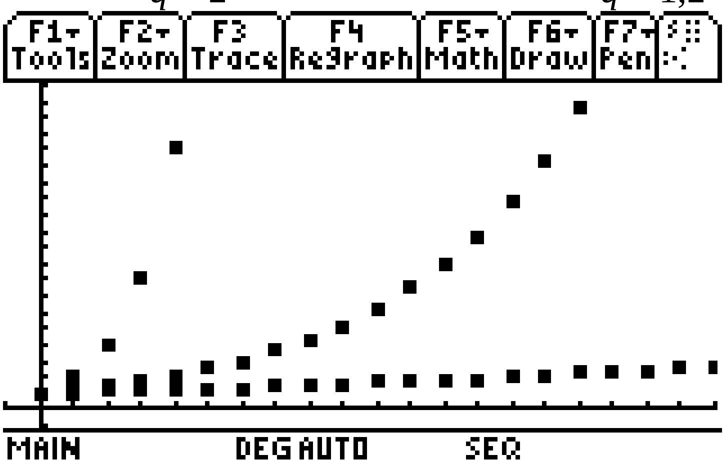
q = 0,95

q = 0,9

q = 0,5

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

q = 2 q = 1,2



q = 1,05

- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.

Conséquences. Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q

$u_n = q^n u_0$, si le 1er terme est u_0 ou $u_n = q^{n-1} u_1$, si le 1er terme est u_0 ou …

- Si $0 \leq q \leq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ {car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$}
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0 \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0 \end{cases}$ {car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$}
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ {car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$}

Lire exercice résolu 4 et faire applications 1 et 2 p 29.

E. Calcul de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

- **Somme des puissances successives de *q*.**

  - si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
  - si $q = 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = n + 1$.

- **Somme des premiers termes d'une suite géométrique.**

  - si $q = 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n + 1) \times u_0$.
  - si $q \neq 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$. {Il y a $n + 1$ termes}
  - si $q \neq 1$, $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$. {Il y a n termes}

À retenir si $q \neq 1$, $S = \dfrac{(\text{premier terme}) \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}$..