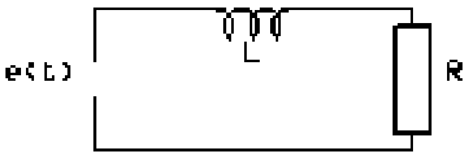
Équations différentielles.

A. Exemples d'introductions.

- En électricité

L'étude de l'intensité dans le circuit de la figure ci-contre conduit à la relation :

$$Li'(t) + Ri(t) = e(t)$$

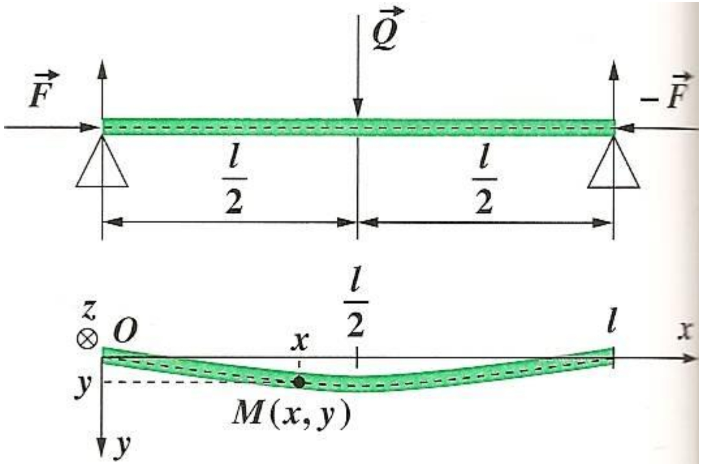


- En mécanique

L'étude de la flèche d'une poutre soumise aux actions $\vec{F}$ et $\vec{Q}$ (figure ci-contre) mène à la relation :

$$y''(x) + k^2y(x) = -\lambda x$$

k et λ sont des constantes liées à la poutre



Les relations telles que :

$$Li'(t) + Ri(t) = e(t)$$

ou $\quad y''(x) + k^2y(x) = -\lambda x$

sont appelées : équations différentielles.

B. Définitions.

- On appelle équation différentielle une relation entre la variable t, une fonction (de t) inconnue et certaines de ses dérivées.

Elle s'écrit : $F(t, f, f', f'', \dots) = 0 \quad (1)$

Exemple : $\quad 2f''(t) - 3f'(t) + f(t) = 0$ est une équation différentielle.

- On appelle ordre d'une équation différentielle, l'ordre maximum des dérivées figurant dans la relation (1).

Exemple : $\quad f'(t) - tf(t) = 0$ est une équation différentielle du premier ordre.

$f''(t) - f(t) = t$ est une équation différentielle du second ordre.

- On appelle solution d'une équation différentielle (1) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction vérifiant la relation (1), pour tout t de I.

Exemple. Considérons l'équation différentielle du premier ordre : $\quad f'(t) - f(t) = 0 \quad$ (E)

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t$ vérifie (E) : en effet pour tout réel t, on a :

$$g'(t) - g(t) = e^t - e^t = 0$$

Nous dirons que g est une solution particulière de (E).

● Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions.
L'ensemble des solutions est aussi appelé solution générale de l'équation différentielle.

Remarques :

– La fonction inconnue est souvent notée y, puis les dérivées première et seconde y' et y''.
– Les dérivées première et seconde peuvent être notées respectivement $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$ lorsque la variable est t.

Exemple. La même équation différentielle s'écrira :

$$\mathrm{L}i''(t) + \mathrm{R}i'(t) + \frac{1}{\mathrm{C}}\,i(t) = \mathrm{e}'(t)$$

ou
$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{C}}\,i = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

ou plus simplement
$$\mathrm{L}i'' + \mathrm{R}i' + \frac{1}{\mathrm{C}}\,i = \mathrm{e}'$$

C. Équations linéaires du premier ordre.

C.1. Définition.

On appelle équation linéaire du premier ordre une équation de la forme : $a(t)y' + b(t)\,y = c(t)$ (1)
où a, b et c sont des fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ avec $a(t) \neq 0$ sur I.

Si $c(t) \neq 0$, l'équation (1) est dite « avec second membre ».
On lui associera l'équation $a(t)y' + b(t)\,y = 0$ (2) dite « sans second membre ».

Exemples.

● $ty' - 3y = \sin t$: équation avec second membre.

● $ty' - 3y = 0$: équation sans second membre.

C.2. Résolution de l'équation sans second membre $a(t)y' + b(t)\,y = 0$ $\{a(t) \neq 0\}$.

Puisque $a(t)$ est différent de 0, l'équation est équivalente à : $y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = 0$ (1)

Soit F une primitive sur I de la fonction : $t \longmapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

$\{F$ existe puisque a et b sont deux fonctions dérivables sur I et $a(t) \neq 0\}$

Par conséquent on a, pour tout réel t de I, $F'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $\mathrm{e}^{F(t)}$; on obtient

$$y'\mathrm{e}^{F(t)} + \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{e}^{F(t)}y = 0$$

ou
$$y'\mathrm{e}^{F(t)} + F'(t)\,\mathrm{e}^{F(t)}y = 0 \quad (2)$$

On remarque alors que le membre de gauche de la relation (2) est la dérivée du produit $y\mathrm{e}^{F(t)}$

d'où $(y\mathrm{e}^{F(t)})' = 0$ et $y\mathrm{e}^{F(t)} = k$ $(k \in \mathbb{R})$

Conclusion. En multipliant les deux membres par $\mathrm{e}^{-F(t)}$ on obtient : $y = k\mathrm{e}^{-F(t)}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Théorème. Si a et b sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $a(t) \neq 0$ sur I

alors l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle : $a(t)y' + b(t)\,y = 0$

est définie par : $y(t) = k\mathrm{e}^{-F(t)}$

où k est un réel quelconque et F une primitive sur I de la fonction : $t \longmapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

Exemple 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.

Exemple 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y' - 2ty = 0$.

C.3. Résolution de l'équation avec second membre $a(t)y' + b(t)\,y = c(t)$ $\{a(t) \neq 0\}$.

a, b et c sont des fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ avec $a(t) \neq 0$ sur I.

Théorème. (Admis)

La solution générale de l'équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre

Méthode de résolution de l'équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ (1)

- On considère l'équation sans second membre : $a(t)y' + b(t)y = 0$ (2)

  On résout cette équation.

  On trouve $y_2(t) = k\mathrm{e}^{-F(t)}$ avec ($k \in \mathbb{R}$) et F primitive sur I de $t \longmapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
- On cherche une solution particulière y_1 de l'équation (1)
- On conclut : La solution générale de l'équation (1) est $y_1 + y_2$.

C.4. Recherche d'une solution particulière de l'équation (1).

Si $a(t)$ et $b(t)$ sont des constantes et $c(t)$ un polynôme ou une expression de la forme $\mathrm{A}\cos\omega\mathrm{t} + \mathrm{B}\sin\omega\mathrm{t}$, on peut chercher une solution particulière de la même forme que $c(t)$.

Exemple 1. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) : $y' - 2\,y = -4t$ ($I = \mathbb{R}$).

Exemple 2. Déterminer une solution particulière de l'équation (F) : $y' - 2\,y = 13\sin 3t$ ($I = \mathbb{R}$).

C.5. Recherche d'une solution vérifiant les conditions initiales.

Lorsqu'une équation différentielle provient de l'étude d'un système physique, celui-ci est soumis à une ou plusieurs conditions initiales.

Exemple. Résoudre sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, l'équation : $(x+1)y' + y = 4x - 3$ (E).

Trouver la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.

D. Équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants.

D.1. Définition.

On appelle équation linéaire à du second ordre à coefficients constants une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

où a, b, c sont des nombres réels ($a \neq 0$) et d une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est dite équation sans second membre associée.

Exemples : $y'' + y' - 2y = t - 1$ et $y'' + 4y = \sin t$ sont des équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

D.2. Résolution de l'équation *ay'' + by' + cy* = 0 (1).

Théorème. (Admis)

La solution générale de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ (1) s'écrit :

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions particulières indépendantes (dont le rapport n'est pas constant) de l'équation (1) et C_1 et C_2 des constantes réelles ou complexes.

Conséquences.

Pour résoudre l'équation (1) nous en déterminerons deux solutions particulières indépendantes.

Résolution.

Cherchons des solutions de l'équation (1) sous la forme : $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ (r est un nombre réel)

$$y(t) = \mathrm{e}^{rt} \quad \text{donne} \quad y'(t) = r\mathrm{e}^{rt} \quad \text{et} \quad y''(t) = r^2\mathrm{e}^{rt}$$

y est solution de l'équation (1) si et seulement si : $ay'' + by' + cy = 0$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow ar^2\mathrm{e}^{rt} + br\mathrm{e}^{rt} + c\mathrm{e}^{rt} = 0 \\ &\Leftrightarrow (ar^2 + br + c)\mathrm{e}^{rt} = 0 \\ &\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0 \quad \{\text{pour tout réel } t,\ \mathrm{e}^{rt} \neq 0\} \end{aligned}$$

{L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle (1)}

La résolution de l'équation caractéristique conduit à trois cas :

- **1^er cas : $\Delta > 0$**

L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 ; il leur correspond deux solutions de (1) : $y_1(t) = \mathrm{e}^{r_1t}$ et $y_2(t) = \mathrm{e}^{r_2t}$.

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{\mathrm{e}^{r_2t}}{\mathrm{e}^{r_1t}} = \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t}. \quad r_1 \neq r_2 \text{ par conséquent } \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t} \text{ n'est pas constant !}$$

y_1 et y_2 sont donc deux solutions particulières indépendantes de l'équation (1)

La solution générale est alors $\boldsymbol{y(t) =} C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = \boldsymbol{C_1\mathrm{e}^{r_1t} + C_2\mathrm{e}^{r_2t}}$

Exemple. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$ (1)

- **$2^{\text{ième}}$ cas : $\Delta = 0$**

L'équation caractéristique à une solution double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$; il lui correspond une solution de (1) :

$$y_1(t) = e^{r_0 t}.$$

Montrons que la fonction y_2 définie par $y_2(t) = te^{r_0 t}$ est également solution de (1).

On a : $y_2'(t) = e^{r_0 t} + tr_0 e^{r_0 t}$ et $y_2''(t) = r_0 e^{r_0 t} + r_0 e^{r_0 t} + tr_0^2 e^{r_0 t} = 2r_0 e^{r_0 t} + tr_0^2 e^{r_0 t}$.

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2r_0 e^{r_0 t} + tr_0^2 e^{r_0 t}) + b(e^{r_0 t} + tr_0 e^{r_0 t}) + cte^{r_0 t} \\ &= 2ar_0 e^{r_0 t} + atr_0^2 e^{r_0 t} + be^{r_0 t} + btr_0 e^{r_0 t} + cte^{r_0 t} \\ &= (2ar_0 + b)e^{r_0 t} + (ar_0^2 + br_0 + c)te^{r_0 t}. \end{aligned}$$

Rappelons nous que $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et que par conséquent $2ar_0 + b = 0$

r_0 est également la solution de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ donc $ar_0^2 + br_0 + c = 0$.

Ces deux constatations nous permettent donc d'affirmer que $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$ c'est-à-dire que y_2 est également solution de (1).

$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} = \dfrac{te^{r_0 t}}{e^{r_0 t}} = t$, y_1 et y_2 sont donc deux solutions particulières indépendantes.

La solution générale de l'équation (1) est alors :

$$\boldsymbol{y(t)} = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{r_0 t} + C_2 te^{r_0 t} = \boldsymbol{(C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}} \text{ avec } r_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Exemple. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$ (1)

$3^{\text{ième}}$ cas : $\Delta < 0$

L'équation caractéristique n'a pas de solutions réelles mais admet deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta = -\dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\alpha - i\beta = -\dfrac{b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Nous admettrons que les fonctions : $y_1(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ et $y_2(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ sont deux solutions particulière de l'équation différentielle (1).

La solution générale de l'équation différentielle (1) est donc :

$$\boldsymbol{y(t)} = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{\alpha t}\sin\beta t + C_2 e^{\alpha t}\cos\beta t = \boldsymbol{e^{\alpha t}(C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t)}$$

Remarque : Il est souvent pratique d'avoir cette solution sous la forme $Ke^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi)$.

Pour parvenir à cette expression on considére le nombre complexe non nul, $z = C_1 + iC_2$.

Ce nombre complexe a une forme trigonométrique : $z = [K, \varphi]$ avec :

$$K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{C_1}{K} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{C_2}{K}.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}(C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t) \\ &= e^{\alpha t}K\left(\frac{C_1}{K}\sin\beta t + \frac{C_2}{K}\cos\beta t\right) \\ &= e^{\alpha t}K(\cos\varphi \sin\beta t + \sin\varphi \cos\beta t) \\ &= e^{\alpha t}K(\sin\beta t \cos\varphi + \cos\beta t \sin\varphi) \\ &= e^{\alpha t}K\sin(\beta t + \varphi). \end{aligned}$$

Exemple. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$ (1)

À retenir : **Tableau récapitulatif (a, b et c sont des réels ; $a \neq 0$).**

	Équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	Solutions de $ay'' + by' + cy = 0$
$\Delta > 0$	2 solutions réelles distinctes : r_1 et r_2	$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	1 solution réelle : $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$ $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	2 solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t)$ $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$

D.3. Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$.

Nous nous plaçons dans le cas où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$) et où d est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème. (Admis)

> La solution générale de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre.

Nous allons utiliser ce théorème et le théorème qui suit pour résoudre des équations différentielles du second ordre avec second membre dans quelques cas simples.

Théorème. Une équation du type $ay'' + by' + cy = d(t)$, où $d(t) = e^{\alpha t}P(t)$ admet une solution particulière de type $t \longmapsto e^{\alpha t}Q(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exemple 1. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 2t + 7$ (1) $I = \mathbb{R}$.

Exemple 2. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' = 6t - 1$ (1) $I = \mathbb{R}$.
On cherchera une solution particulière de la forme $t \longmapsto At^2 + Bt + C$.

Exemple 3. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 7 \cos t - \sin t$ (1) $I = \mathbb{R}$.
On cherchera une solution particulière de la forme $t \longmapsto A\cos t + B \sin t$.

Exemple 4. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (1) $I = \mathbb{R}$.

Exemple 5. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (1) $I = \mathbb{R}$.
On cherchera une solution particulière de la forme $t \longmapsto A\,te^{t}$.

D.4. Résolution d'une équation ayant des conditions initiales.

Dans certains exercices proposés à l'examen, on demande la solution d'une équation différentielle vérifiant deux conditions initiales. Il s'agit alors de calculer C_1 et C_2.

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

a) Résoudre (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.

b) Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_1(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).
c) En déduire la solution générale de (E).
d) Déterminer la solution y_2 de (E) qui vérifie $y_2(0) = 4$ et $y_2'(0) = 1$.