Développements limités.

A. Formule de Taylor avec reste intégral. [Taylor Brook (1685 – 1731) Anglais].

A.1. Préambule.

Considérons une fonction f, deux fois dérivable, telle que f'' soit intégrable sur $[a\ ;\ b]$

Calculons $\int_a^b (b-t)f''(t)\,dt$ en procédant par intégration par parties :

On pose : $u(t) = b - t$ et $v'(t) = f''(t)$
d'où $u'(t) = -1$ et $v(t) = f'(t)$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b (b-t)f''(t)\,dt &= \big[(b-t)\,f'(t)\big]_a^b - \int_a^b -f'(t)\,dt \\ &= \big[(b-t)\,f'(t)\big]_a^b + \int_a^b f'(t)\,dt \\ &= \big[(b-t)\,f'(t)\big]_a^b + \big[f(t)\big]_a^b \\ &= -(b-a)\,f'(a) + f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Conclusion :

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\,dt$$

C'est cette formule que nous allons généraliser dans le paragraphe qui suit.

A.2. Cas général.

Considérons une fonction f, $(n+1)$ fois dérivable telle que chacune des $(n+1)$ dérivées soit intégrable sur $[a\ ;\ b]$.

Calculons d'abord $I_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt$ en procédant par intégration par parties

On pose $u(t) = \frac{(b-t)^n}{n\,!}$ et $v'(t) = f^{(n+1)}(t)$
d'où $u'(t) = -\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v(t) = f^{(n)}(t)$

On obtient :

$$\begin{aligned}I_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt &= \left[\frac{(b-t)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\,dt \\ &= -\frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\,dt \\ &= -\frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + I_{n-1}\end{aligned}$$

Résumons nous:

$$I_n = -\frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + I_{n-1}$$

Nous pouvons alors calculer de la même manière I_{n-1} puis I_{n-2}, … , jusqu'à I_1, qui est l'intégrale calculée dans le préambule.

On obtient alors :

$$I_n = -\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \ \dots\ - (b-a) f'(a) + f(b) - f(a)$$

Conclusion : Formule de Taylor avec reste intégrale.

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

L'intégrale $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$ est le reste « intégral » du développement.

A.3. Majoration du reste.

Nous allons majorer maintenant la valeur absolue du reste intégral par une expression plus simple lorsque $f^{(n+1)}$ est une fonction bornée.

● Pour $a \le b$, on a $\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| dt$ car $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

Comme $f^{(n+1)}$ est bornée on peut écrire $m_1 \le f^{(n+1)}(t) \le m_2$ ou encore $|f^{(n+1)}(t)| \le M$, M désignant le plus grand des réels $|m_1|$ et $|m_2|$.

On obtient alors : $\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!} M\,dt$

Mais comme $a \le t \le b$, $b - t \ge 0$ donc $|b-t| = b-t$. Ainsi on obtient :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M\,dt$$

L'intégrale $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M\,dt$ vaut $\frac{M}{n!}\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$ soit encore $\frac{M}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}$.

On a donc obtenu : $\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}$.

● Pour $a \ge b$, on obtiendrait en procédant de la même manière :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,(a-b)^{n+1}.$$

On obtient donc dans le cas général :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|b-a|^{n+1}.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale devient en isolant le reste dans le second membre et en prenant les valeurs absolues des deux membres :

$$\left|f(b) - f(a) - (b-a)\,f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right| = \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right|$$

Ce qui donne en utilisant la majoration précédente :

Théorème – Inégalité de Taylor.

Si f admet $n + 1$ dérivées sur $[a\,;\,b]$ et si $f^{(n+1)}$ est bornée, on a :

$$\left|f(b) - f(a) - (b-a)\,f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|b-a|^{n+1}.$$

B. Application aux développements limités.

Considérons une fonction f, n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0, et telle que $f^{(n+1)}$ soit intégrable sur I.

Colin Mac Laurin (1698 – 1746) Mathématicien anglais disciple de Newton décide de remplacer b par x et a par 0 dans la formule de Taylor avec reste intégral, il obtient :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Il démontre et nous admettrons que $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$ peut s'écrire $x^n \varepsilon(x)$ où ε est une fonction vérifiant $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Conclusion : $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Commentaires.

$f(x)$ peut donc s'écrire sous la forme $P(x) + x^n \varepsilon(x)$ où P est un polynôme de degré au plus égal à n et ε est une fonction vérifiant $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On dit que $P(x) + x^n \varepsilon(x)$ est le développement limité d'ordre n de f au voisinage de 0.

$P(x)$ est appelé partie régulière et $x^n \varepsilon(x)$ est le terme complémentaire.

C. Développements limités classiques.

C.1. Fonction exponentielle.

Considérons la fonction exponentielle définie par $f(x) = e^x$

Pour tout entier n, $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

Lorsqu'on applique la formule de Mac Laurin on obtient :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C2. Fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$

1ère méthode. On applique la formule de Mac Laurin en remarquant que :

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1!}{(1+x)^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 2! \times \frac{-3(1+x)^2}{(1+x)} = \frac{3!}{(1+x)^4} \quad ; \quad \text{etc} \dots$$

et que par conséquent : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{(1+x)^{n+1}}$ et $f^{(n)}(0) = (-1)^n \times n!$

2ième méthode. On peut remarquer aussi que :

$$(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$
$$+ x - x^2 + x^3 + \dots - (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^{n+1}$$
$$= 1 + (-1)^{n+1} x^{n+1}$$

En divisant par $1 + x$ les deux membres de cette égalité et en les échangeant, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

D'où :
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \times \frac{(-1)^n x}{1+x}$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Nous avons bien obtenu le développement limité d'ordre n puisque $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(-1)^n x}{1+x} = 0$.

La deuxième méthode plus artisanale à l'avantage de nous fournir directement le terme complémentaire sans avoir à faire un calcul intégral.

Exemple. Donnons un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $\dfrac{1}{x+3}$

$\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3\left(\dfrac{x}{3}+1\right)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\dfrac{x}{3}+1} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{t+1}$ en posant $t = \dfrac{x}{3}$ (lorsque x est voisin de 0, t l'est également)

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{t+1} = \frac{1}{3}(1 - t + t^2 - t^3 + t^3\ \varepsilon(t)) = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 \varepsilon\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

Conclusion : $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{9} + \dfrac{x^2}{27} - \dfrac{x^3}{81} + x^3 \varepsilon_1(x)$ en prenant $\varepsilon_1(x) = \dfrac{1}{81} \times \varepsilon\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

C.3. Fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + x)$ $(x > -1)$.

On remarque que $x \longmapsto \ln(1 + x)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Considérons le développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$$

En intégrant les deux membres on obtient :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x P(t) + t^n \varepsilon(t)\,dt = \int_0^x P(t)\,dt + \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,dt$$

D'où, $F(x) - F(0) = \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt + \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,dt,$ {F étant une primitive de f}

Et $F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt + x^{n+1} \varepsilon_1(x)$ {avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$}

{en admettant que $\displaystyle\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,dt = x^{n+1} \varepsilon_1(x)$}

Utilisons ce résultat pour la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x)$ primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$:

$$\ln(1 + x) = \ln(1 + 0) + \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n \ dt + x^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

Soit : $$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_1(x) \quad \{\text{D.L. à l'ordre } n + 1\}$$

Ce qui donne à l'ordre n :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon_1(x) \quad \{\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0\}$$

C.4. Fonctions trigonométriques.

C.4.1. Fonction sinus.

$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin x)'' = -\sin x$	$(\sin x)^{(3)} = -\cos x$	$(\sin x)^{(4)} = \sin x$
$\sin(0) = 0$	$(\sin x)'(0) = 1$	$(\sin x)''(0) = 0$	$(\sin x)^{(3)}(0) = -1$	$(\sin x)^{(4)}(0) = 0$

On obtient en utilisant la formule de Mac Laurin :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \quad \{\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0\}$$

Remarque : Il n'y a que des polynômes de degré impair et l'alternance des signes.

C.4.2. Fonction cosinus.

Pour obtenir le développement limité de la fonction cosinus dérivons celui de la fonction sinus :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \quad \{\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0\}$$

Remarque : Il n'y a que des polynômes de degré pair et l'alternance des signes.

Exemple 1. Donnons un développement limité d'ordre 3 puis d'ordre 4 de $\sin x$ au voisinage de 0.

Exemple 2. Donnons un développement limité d'ordre 3 de $\cos 2x$ au voisinage de 0.

C.5. Fonction $f : x \longmapsto (1 + x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$

Théorème. (Admis).

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

Exemple 1. Donnons un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$

Exemple 2. Donnons un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ puis de $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

C.6. Développement limité en *a* (*a* réel non nul).

Pour obtenir le développement limité d'une fonction f (de la variable réelle x) au voisinage de a, Il suffit de faire le changement de variable $t = x - a$, ainsi lorsque x sera voisin de a, t sera voisin de zéro et on pourra appliquer les résultats des paragraphes précédents.

Exemple. Donnons un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(x + 1)$ au voisinage de 1.

D. Opérations sur les développements limités.

Théorème.

Soit f et g deux fonctions admettant à l'ordre n au point 0 des développements limités dont les parties régulières sont P et Q.

On admet que :

- $f + g$ admet un développement limité d'ordre n, au point 0 dont la partie régulière est $P + Q$.
- $f\,g$ admet un développement limité d'ordre n, au point 0 dont la partie régulière est PQ en enlevant les termes de degré strictement supérieurs à n.

Exemple 1. Déterminons un développement limité de $\dfrac{1}{1+x} + \ln(1 + x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. puis de $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

Exemple 2. Déterminons un développement limité de $(x + 1)e^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

E. Utilisation des développements limités.

E.1. Interprétation graphique.

Considérons une fonction f admettant un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0.

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + x\varepsilon(x) \qquad \{\text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0\}\ \{\text{Formule de Mac Laurin}\}$$

Comparons ce développement limité à l'équation de la tangente $\mathbb{T}$ en zéro à la courbe $\mathbb{C}$ représentant f.

$$\mathbb{T} : \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$: \quad y = f'(0)\,x + f(0)$$

On constate que la partie régulière du développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de 0 correspond au second membre de l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant f.

Théorème.

Plus généralement si le développement limité d'ordre n au point zéro à pour partie régulière P_n, alors la courbe d'équation $y = P_n(x)$ est tangente en zéro à la courbe représentant f.

La fonction $x \longmapsto P_n(x)$ est en outre la meilleur approximation de f par une fonction polynôme de degré n au voisinage de zéro.

Exemple 1. Considérons la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x + 1)$

Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction h.
En déduire une équation de la parabole tangente à la courbe représentant h en 0.

Exemple 2. Positions relatives de deux courbes au voisinage de zéro.

Considérons la fonction h définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x+1)$

Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction h.

En déduire les positions relatives de la courbe $\mathbb{C}$ représentant h et de la parabole $\mathbb{P}$ d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$

E.2. Calcul de limites.

Exemple 1. Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$

Exemple 2. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$