Exemple 1. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 2t + 7$ (1) $I = \mathbb{R}$.

L'équation sans second membre associée s'écrit : $y'' + 3y' + 2y = 0$ (2)
L'équation (2) a pour solution générale (voir exercice résolu 3. 2.) :

$$y_2(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

$d(t) = 2t + 7$. Cherchons une solution particulière de (1) de la forme :

$$y_1(t) = At + B \quad (A, B : \text{réels inconnus}).$$

On a $y_1'(t) = A$ et $y_1''(t) = 0$.
y_1 est solution de (1) si et seulement si : $y_1''(t) + 3y_1'(t) + 2y_1(t) = 2t + 7$
soit $3A + 2(At + B) = 2t + 7$; $2At + (3A + 2B) = 2t + 7$.

D'où $\begin{cases} 2A = 2 \\ 3A + 2B = 7 \end{cases}$ soit $\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$ par conséquent $y_1(t) = t + 2$.

La solution générale de l'équation (1) s'écrit :

$$y(t) = y_2(t) + y_1(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} + t + 2 \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

Exemple 2. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' = 6t - 1$ (1) $I = \mathbb{R}$.
On cherchera une solution particulière de la forme $t \longmapsto At^2 + Bt + C$.

L'équation sans second membre associée s'écrit : $y'' + 3y' = 0$ (2)
L'équation caractéristique de (2) est : $r^2 + 3r = 0$ soit $r(r + 3) = 0$
d'où $r_1 = 0$ et $r_2 = -3$.
La solution générale de l'équation (2) est :

$$y_2(t) = C_1 \mathrm{e}^{0t} + C_2 \mathrm{e}^{-3t} = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-3t} \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

Nous chercherons une solution particulière de (1) de la forme :

$$y_1(t) = At^2 + Bt + C \qquad (A, B \text{ et } C \text{ inconnus})$$

(*N.B.* : La solution particulière cherchée est du second degré car le coefficient de
nul.)
On a $y_1'(t) = 2At + B$ et $y_1''(t) = 2A$.
y_1 est solution de (1) si et seulement si : $y_1''(t) + 3y_1'(t) = 6t - 1$
soit $2A + 3(2At + B) = 6t - 1$; $6At + (2A + 3B) = 6t - 1$.

D'où $\begin{cases} 6A = 6 \\ 2A + 3B = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

C peut être choisi arbitrairement, par exemple $C = 0$, par conséquent : $y_1(t) = t^2 -$
La solution générale de l'équation (1) s'écrit :

$$y(t) = y_2(t) + y_1(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-3t} + t^2 - t$$
$$y(t) = C_2 \mathrm{e}^{-3t} + t^2 - t + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

Exemple 3. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 7\cos t - \sin t$ (1) $I = \mathbb{R}$.

On cherchera une solution particulière de la forme $t \longmapsto A\cos t + B\sin t$.

L'équation sans second membre associée s'écrit : $y'' + 3y' + 2y = 0$ (2).

L'équation (2) a pour solution : $y_2(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$ (voir exercice résolu 3. 2.).

Posons $y_1(t) = A\cos t + B\sin t$ (A et B inconnus)

d'où $y_1'(t) = -A\sin t + B\cos t$; $y_1''(t) = -A\cos t - B\sin t$

y_1 est solution particulière de (1) si et seulement si :

$$y_1''(t) + 3y_1'(t) + 2y_1(t) = 7\cos t - \sin t$$

soit $-A\cos t - B\sin t + 3(-A\sin t + B\cos t) + 2(A\cos t + B\sin t) = 7\cos t - \sin t$;

$(A + 3B)\cos t + (-3A + B)\sin t = 7\cos t - \sin t$.

D'où $\begin{cases} A + 3B = 7 \\ -3A + B = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$ par conséquent $y_1(t) = \cos t + 2\sin t$.

La solution générale de l'équation (1) est :

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \cos t + 2\sin t \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

Exemple 4. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (1) $I = \mathbb{R}$.

L'équation sans second membre $y'' + 2y' - 3y = 0$ (2) a pour équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ dont les solutions sont 1 et -3.

La solution générale de (2) est donc :

$$y_2(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_1(t) = Ae^{2t}$.

On a : $y_1'(t) = 2Ae^{2t}$ et $y_1''(t) = 4Ae^{2t}$.

En remplaçant dans (1), on obtient : $(4A + 4A - 3A)e^{2t} = e^{2t}$ d'où $5A = 1$; $A = \dfrac{1}{5}$.

On obtient $y_1(t) = \dfrac{1}{5}e^{2t}$

puis $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} + \dfrac{1}{5}e^{2t}$ $(C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R})$ comme solution générale de (1).

Exemple 5. Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ (1) $I = \mathbb{R}$.

On cherchera une solution particulière de la forme $t \longmapsto A\,te^{t}$.

L'équation sans second membre est la même que précédemment, sa solution générale est : $y_2(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t}$ $(C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R})$.

On pose : $y_1(t) = Ate^{t}$.

On obtient : $y_1'(t) = Ae^{t} + Ate^{t} = A(1 + t)e^{t}$

puis $y_1''(t) = A(1 + t)e^{t} + Ae^{t} = A(2 + t)e^{t}$

En remplaçant dans (1) on a : $A(2 + t)e^{t} + 2A(1 + t)e^{t} - 3Ate^{t} = e^{t}$

d'où $4Ae^{t} = e^{t}$; $A = \dfrac{1}{4}$. Donc $y_1(t) = \dfrac{1}{4}te^{t}$.

La solution générale de (1) est donc :

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{4}te^{t} \quad (C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}).$$

D.4. Résolution d'une équation ayant des conditions initiales.

Dans certains exercices proposés à l'examen, on demande la solution d'une équation différentielle vérifiant deux conditions initiales. Il s'agit alors de calculer C_1 et C_2.

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

a) Résoudre (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.

b) Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_1(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).
c) En déduire la solution générale de (E).
d) Déterminer la solution y_2 de (E) qui vérifie $y_2(0) = 4$ et $y_2'(0) = 1$.

a) $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$,

cette équation a pour solution double $r_0 = -1$.

La solution générale de (E_0) est donc : $y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ $(C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R})$.

b) Pour montrer que y_1 est une solution particulière de (E), il suffit de montrer que y_1 est solution de (E).

On obtient successivement :

$y_1(x) = 2x^2e^{-x}$

$y_1'(x) = (4x - 2x^2)e^{-x}$

$y_1''(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x}$

En reportant dans (E), on a :

$y'' + 2y' + y = [(2x^2 - 8x + 4) + 2(4x - 2x^2) + 2x^2]e^{-x} = 4e^{-x}$.

y_1 est donc bien solution particulière de (E).

c) La solution générale de (E) est donc : $y = y_0 + y_1$

soit $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 2x^2e^{-x}$

$= (C_1 + C_2 x + 2x^2)e^{-x}$.

d) y_2 étant une solution de (E), elle vérifie : $y_2(x) = (C_1 + C_2 x + 2x^2)e^{-x}$.

On calcule d'abord $y'_2(x)$:

$$y'_2(x) = (C_2 + 4x)e^{-x} - (C_1 + C_2 x + 2x^2)e^{-x}$$
$$= [(C_2 - C_1) + (4 - C_2)x - 2x^2]e^{-x}$$

$y_2(0) = 4$ donne $C_1 = 4$ et $y_2'(0) = 1$ donne $C_2 - C_1 = 1$ d'où $C_1 = 4$ et $C_2 = 5$.

La solution vérifiant les conditions initiales données est donc définie par :

$$y_2(x) = (4 + 5x + 2x^2)e^{-x}$$

ou en ordonnant le trinôme suivant les puissances décroissantes de x :

$$y_2(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}.$$