C. Équations linéaires du premier ordre - Correction des exemples.

C.4

Exemple 1. Déterminons la solution générale de l'équation (E) : $y' - 2y = -4t$ ($I = \mathbb{R}$).

1° Déterminons l'ensemble des solutions $y_2(t)$ de l'équation **sans second membre** :

$$(F) : y' - 2y = 0.$$

$$\left.\begin{array}{r} a(t) = 1 \\ b(t) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{-2}{1} = -2 \text{ et } F(t) = -2t$$

L'ensemble des solutions de (F) est $y_2(t) = ke^{-F(t)} = ke^{2t}$ ($k \in \mathbb{R}$).

2° Déterminons une solution particulière $y_1(t)$ de l'équation (E) {**avec second membre**} :
Comme le second membre est $-4t$, nous cherchons une solution de la forme $y_1(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$.

$y_1(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B} \Rightarrow y_1'(t) = \mathrm{A}$

$$\begin{aligned} y_1(t) \text{ solution de } y' - 2y = -4t &\Leftrightarrow \mathrm{A} - 2(\mathrm{A}t + \mathrm{B}) = -4t. \\ &\Leftrightarrow -2\mathrm{A}t + \mathrm{A} - 2\mathrm{B} = -4t. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\mathrm{A} = -4 \\ \mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{B} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient : $y_1(t) = 2t + 1$

3° Conclusion : La solution générale de l'équation (E) : $y' - 2y = -4t$ est $y(t) = y_2(t) + y_1(t)$

C'est-à-dire : $\boldsymbol{y(t) = ke^{2t} + 2t + 1}$, k étant un réel quelconque.

Exemple 2. Déterminons une solution particulière de l'équation (F) : $y' - 2y = 13 \sin 3t$ ($I = \mathbb{R}$).

1° Déterminons l'ensemble des solutions $y_2(t)$ de l'équation **sans second membre** :

$$(F) : y' - 2y = 0.$$

$$\left.\begin{array}{r} a(t) = 1 \\ b(t) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{-2}{1} = -2 \text{ et } F(t) = -2t$$

L'ensemble des solutions de (F) est $y_2(t) = ke^{-F(t)} = ke^{2t}$ ($k \in \mathbb{R}$).

2° Déterminons une solution particulière $y_1(t)$ de l'équation (E) {**avec second membre**} :

Comme le second membre est $13\sin 3t$, nous cherchons une solution de la forme $y_1(t) = \mathrm{A} \cos 3t + \mathrm{B} \sin 3t$.

$y_1(t) = \mathrm{A} \cos 3t + \mathrm{B} \sin 3t \Rightarrow y_1'(t) = -3\mathrm{A} \sin 3t + 3\mathrm{B} \cos 3t$.

$$\begin{aligned} y_1(t) \text{ solution de } y' - 2y = 13 \sin 3t &\Leftrightarrow -3\mathrm{A} \sin 3t + 3\mathrm{B} \cos 3t - 2(\mathrm{A} \cos 3t + \mathrm{B} \sin 3t) = 13 \sin 3t. \\ &\Leftrightarrow (-2\mathrm{A} + 3\mathrm{B}) \cos 3t + (-3\mathrm{A} - 2\mathrm{B}) \sin 3t = 13 \sin 3t. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\mathrm{A} + 3\mathrm{B} = 0 & \mathrm{L}_1 \\ -3\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 13 & \mathrm{L}_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\mathrm{A} + 3\mathrm{B} = 0 & \mathrm{L}_1 \\ 13\mathrm{B} = -26 & \mathrm{L}_2 \leftarrow 3[\mathrm{L}_1] - [\mathrm{L}_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -3 \\ \mathrm{B} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient : $y_1(t) = -3 \cos 3t - 2 \sin 3t$.

3° Conclusion : La solution générale de l'équation (E) : $y' - 2y = 13 \sin 3t$ est $y(t) = y_2(t) + y_1(t)$

C'est-à-dire : $\boldsymbol{y(t) = ke^{2t} - 3 \cos 3t - 2 \sin 3t}$, k étant un réel quelconque.

C.5. Recherche d'une solution vérifiant les conditions initiales.

Lorsqu'une équation différentielle provient de l'étude d'un système physique, celui-ci est soumis à une ou plusieurs conditions initiales.

Exemple. Résoudre sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, l'équation : $(x+1)y' + y = 4x - 3$ (E).

Trouver la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.

1° Déterminons la solution générale $y_2(t)$ de l'équation **sans second membre** :

$$(F) : (x+1)y' + y = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} a(x) &= x+1 \\ b(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{1}{x+1} \quad \text{et } F(x) = \ln(x+1)$$

la solution générale de (F) est $y_2(x) = ke^{-F(x)} = ke^{-\ln(x+1)} = \dfrac{k}{e^{\ln(x+1)}} = \dfrac{k}{x+1}$ $(k \in \mathbb{R})$.

2° Déterminons maintenant une solution particulière $y_1(t)$ de l'équation (E) {**avec second membre**} :
Comme le second membre est $4x + 3$, nous cherchons une solution de la forme $y_1(x) = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$.

$y_1(x) = \mathrm{A}x + \mathrm{B} \Rightarrow y_1'(t) = \mathrm{A}$

$y_1(x)$ solution de $(x+1)y' + y = 4x - 3$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \mathrm{A}(x+1) + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 4x - 3 \\ &\Leftrightarrow 2\mathrm{A}x + (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 4x - 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathrm{A} = 4 \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{B} = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient : $y_1(x) = 2x - 5$.

3° La solution générale sur $]-1\,;+\infty[$ de l'équation (E) : $(x+1)y' + y = 4x - 3$ est $y(x) = y_2(x) + y_1(x)$

C'est-à-dire : $\boldsymbol{y(x) = \dfrac{k}{x+1} + 2x - 5}$, k étant un réel quelconque.

4° Déterminons g : $g(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{k}{0+1} + 2 \times 0 - 5 = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

La solution cherchée est donc définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{5}{x+1} + 2x - 5$.

D. Équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants.

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

D.2. Résolution de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ (1).

Exemple 1: Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$ (1)

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + 3r + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4\,ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$; $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2} = -2$; $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1.$

Conclusion : La solution générale de l'équation (1) est donc $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$ avec $C_1 \in IR$ et $C_2 \in IR$

Exemple 2: Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$ (2)

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + 6r + 9 = 0$ soit $(r + 3)^2 = 0$, d'où $r_0 = -3$

Conclusion : La solution générale de l'équation (2) est donc $y(t) = (C_1 + C_2t)e^{-3t}$ avec $C_1 \in IR$ et $C_2 \in IR$

Exemple 3: Déterminons la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$ (3)

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + 2r + 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4\,ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16\ ;$$

$r_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-i\sqrt{16}}{2} = -1-2i$; $\qquad r_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+i\sqrt{16}}{2} = -1+2i.$

Par conséquent : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$

Conclusion :

La solution générale de l'équation (3) est donc $y(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ avec $C_1 \in IR$ et $C_2 \in IR$