

COMPLEXES

Exercice n° 1 Sommes et produits dans \mathbb{C} :

- Soit les nombres complexes, $z = 4 - 2i$ et $z' = -2 - 5i$, mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$:

$$z + z' \quad 2z - 4z' \quad z \times z' \quad z'^2 \quad z^3 \quad (-2 - z)(3 - 4z')$$

- Développer et mettre sous la forme algébrique $a + ib$ les nombres complexes :

$$(3 + i)^2 \quad (-4 - i)^2 \quad (4 - 2i)(4 + 2i)$$

- On considère le nombre complexe $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, mettre les nombres complexes suivants

sous la forme $a + ib$:

$$z^2 \quad z^3 \quad z^4 \quad 1 + z + z^2 \quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

Exercice n° 2 Inverses et quotients dans \mathbb{C}

- Soit les nombres complexes, $z = 2 - 5i$ et $z' = -1 - 2i$, mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$:

$$\frac{1}{z} \quad \frac{-2}{z} \quad \frac{z}{z'} \quad \frac{1+z}{1-z'}$$

- Mettre sous la forme $a + bi$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{1-i} \quad -i + \frac{1}{2i} \quad \frac{1-3i}{2+i} \quad \left(\frac{1-3i}{2+i}\right)^2 \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

Exercice n° 3 Conjugué

- Calculer le conjugué du nombre complexe $z = \frac{(2-i)(1+i)}{2i(5+3i)}$.

- On considère les nombres complexes $z_1 = i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.

b) Calculer $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ sous forme algébrique.

Soit z et z' deux complexes de module 1 tels que $1 + zz' \neq 0$

c) Montrer que $z\bar{z}' = 1$ et $z'\bar{z} = 1$

d) Soit $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$. Ecrire \bar{u} en fonction de z et \bar{z}'

e) Calculer $u - \bar{u}$. En déduire que u est réel.

Exercice n° 4 Module et argument

- Calculer le module et l'argument des complexes suivants :

$$1 + i \quad 2 - 2i \quad \sqrt{3} - i \quad -7i \quad -4$$

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad -2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad 36 \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$1 + i\sqrt{3} \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

Exercice n° 5 Problème I

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1^3 z_2$.

- Mettre z_1^3 sous la forme algébrique
- Mettre Z sous la forme algébrique.
- Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_1^3 .
- Déterminer le module et un argument de z_2 .
- Déduire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z .
- En comparant les écritures algébriques et trigonométriques de Z , déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et de $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Exercice n° 6 Problème II

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} , l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$
- Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal d'unité graphique 1 cm. On appelle A le point d'affixe $z_1 = -1 - i$ et B le point d'affixe $z_2 = -1 + i$.
 - Calculer le module et un argument de chacun des complexes z_1 , z_2 et $z_2 - z_1$.
 - Calculer le module et un argument du complexe $\frac{z_2}{z_1}$. Ecrire $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme algébrique.
 - Déduire du a) les distances OA, OB et AB. Déterminer la nature du triangle AOB. Justifier la réponse.