Calculs dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

45 **C** On considère les nombres complexes $z = 2 - 2i$; $z' = -4 + i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$$z + z' \; ; \; z - \overline{z} \; ; \; zz' \; ; \; \frac{1}{z} \; ; \; \frac{z}{z'}.$$

46 On donne les nombres complexes z et z'.

Calculer zz' ; $\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$.

1. $z = 1 - 2i$; $z' = 4 + 3i$.

2. $z = 4i$; $z' = 2 + 5i$.

47 On considère les nombres complexes

$$z = 5 + 3i \; ; \; z' = 2i.$$

Écrire sous forme algébrique les nombres suivants

1. $z + z'$; $z + \overline{z}$; $z - z'$; $z - \overline{z}$.

2. zz' ; $z\overline{z}$.

3. $\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$.

48 **R** Écrire sous forme algébrique :

$$\frac{1}{1+i} \; ; \; \frac{1}{4-2i} \; ; \; \frac{3-i}{1+i} \; ; \; \frac{4+2i}{3-2i}.$$

Module et argument. Notation exponentielle

Pour chacun des exercices 49 et 50, *calculer le module et un argument, puis écrire le nombre sous la forme trigonométrique.*

49 **R** $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 2 + 2i$; $z_3 = 3i$.

50 $z_1 = -2 + 3i\sqrt{3}$; $z_2 = -4$; $z_3 = i\sqrt{3}$.

51 Écrire chacun des nombres suivants à l'aide de la notation exponentielle.

$z_1 = \sqrt{3} - i$ $\qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$z_3 = -3$ $\qquad z_4 = 3 + i\sqrt{3}$

$z_5 = (1+i)^3$ $\qquad z_6 = \dfrac{1}{1+i}$

52 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 d'affixes respectives :

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\qquad z_2 = 5e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$z_3 = 4e^{i\pi}$; $\qquad z_4 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

53 Donner l'écriture algébrique des nombres suivants :

$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\qquad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_3 = 2e^{i\pi}$; $\qquad z_4 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$

54 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z = 2 - 4i \ ; \quad z' = 6 + 3i$$

55 **C** On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}) \text{ et } z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

1. a) Déterminer le module et un argument de z_1, puis de z_2.

b) En déduire le module et un argument de $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Exprimer Z sous la forme algébrique. En déduire les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

56 **1.** Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 8\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$.

2. On considère le nombre complexe z_0 tel que $z_0 = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 2\mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$

Vérifier que $z_0{}^2 = Z$.

3. Déduire des résultats obtenus précédemment :

a) le module et un argument de z_0 ;

b) les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$.

Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

60 **R** $z^2 - z + 1 = 0$; $z^2 - 6z + 12 = 0.$

61 $z^2 + 3z + 9 = 0$; $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0.$