Fiche n° 3

ÉTUDE D'UNE FONCTION.

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

L'étude de cette fonction se fera en général en suivant la méthode décrite sur cette fiche.

A. Étude des limites aux bornes du domaine de définition :

{Voir fiche n° 1}

B. Étude des variations de la fonction.

– Calcul de la fonction dérivée {Voir fiche n° 2}.
– Étude du signe de la dérivée.
– Tableau de variations, lecture des minima ou maxima s'il y en a.

C. Équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}$ en un point A d'abscisse donné.

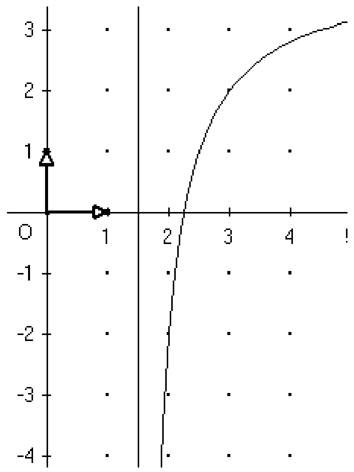
{Voir fiche n° 2}

D. Étude des asymptotes – Position relative entre une courbe et une droite.

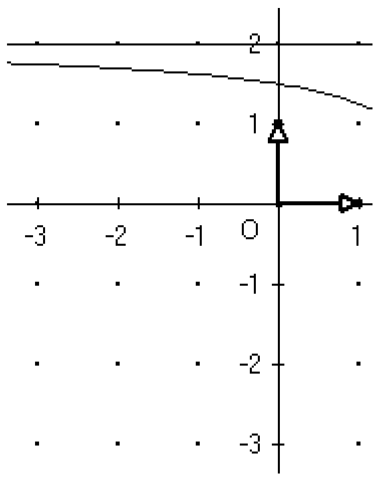
- **Si** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$,
  alors la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boldsymbol{x = a}$ est **une asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}$.

- **Si** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ { L valeur finie},
  alors la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boldsymbol{y = L}$ est **une asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}$.

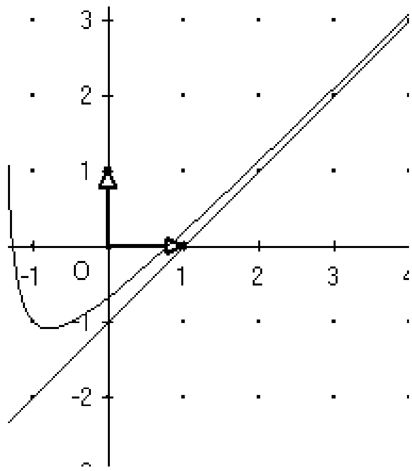
- **Si** $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$,
  alors la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ est **une asymptote oblique** la courbe $\mathcal{C}$.



Asymptote verticale : x = 1,5



Asymptote horizontale : y = 2



Asymptote oblique : y = x – 1

- L'étude du signe de $[f(x) - L]$ ou de $[f(x) - (ax + b)]$ détermine la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

E. Tracé de la courbe.

– On commence par lire l'échelle si elle est donnée.
– On place les asymptotes trouvées (s'il y en a).
– On remplit un tableau de valeur à l'aide de la calculatrice.
– On place les points dans le repère et on les relie entre eux, sans utiliser une règle, et en respectant les variations de la fonction.

F. Applications.

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x}$

$\mathbb{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

2° a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser sont tableau de variations.

3° Déterminer l'équation de la tangente $\mathbb{T}$ à la courbe $\mathbb{C}$ au point A d'abscisse 1.

4° a) Montrer que la droite $\mathbb{D}$ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathbb{C}$ par rapport à $\mathbb{D}$ sur $]0 ; +\infty[$.

c) Montrer que la courbe $\mathbb{C}$ admet une asymptote verticale.

5°a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, en donnant les valeurs arrondies à 10^{-1} près :

x	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	4	5
$f(x)$													

b) Tracer, dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la droite $\mathbb{D}$, la tangente $\mathbb{T}$, et la courbe $\mathbb{C}$ sur du papier millimétré.

(Vous prendrez 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1cm pour unité sur l'axe des ordonnées)