Fiche n° 1 RÉCAPITULATIF SUR LES LIMITES.

A. Limites usuelles.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

B. Opérations sur les limites.

B.1. Limite d'une somme *f* + *g*.

Si *f* a pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si *g* a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors *f* + *g* a pour limite	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

B.2. Limite du produit d'un produit *f* × *g*.

Si *f* a pour limite	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
Si *g* a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors *fg* a pour limite	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

B.3. Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

1° Cas où la limite de *g* n'est pas nulle :

Si *f* a pour limite	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si *g* a pour limite	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

2° Cas où la limite de *g* est nulle :

Si *f* a pour limite	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
Si *g* a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Théorème :

1° La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la même que celle de son terme de plus haut degré.
2° La limite d'une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la même que celle du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.

C. Limite d'une fonction composée.

Théorème : a, b et L désignant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$,

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = L$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g[u(x)] = L$ ou $\lim\limits_{x \to a} (g \circ u)(x) = L$.

D. Applications.

Exercice 1. Calculer les limites, en $+\infty$ et en $-\infty$, des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3x^2 - 4x + 1$ $\quad$ $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ $\quad$ $f_3(x) = -\dfrac{4}{3}x^4 - 3x^2 + \dfrac{1}{3}$ $\quad$ $f_4(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$

$f_5(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$ $\quad$ $f_6(x) = \dfrac{2x-1}{4x^3+5}$ $\quad$ $f_7(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} - 4$

Exercice 2. Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$f_8(x) = \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x^2} - 5\right)$ $\quad$ $f_9(x) = \sqrt{4 + \dfrac{1}{x}}$ $\quad$ $f_{10}(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ $\quad$ $f_{11}(x) = (x^2 - 4)^2(1 - x)$

Exercice 3. f est une fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty\,;-1[$ par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

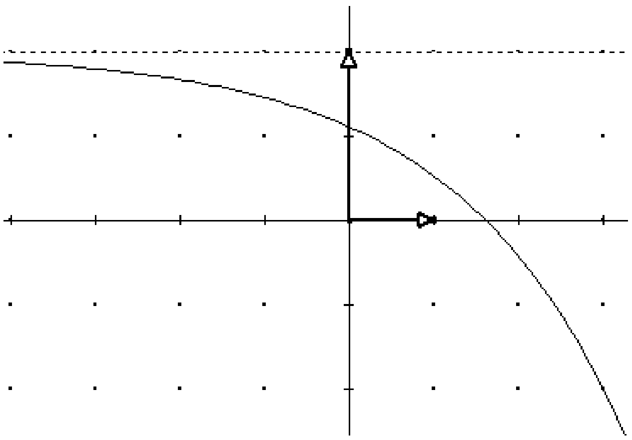
1° Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2° Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

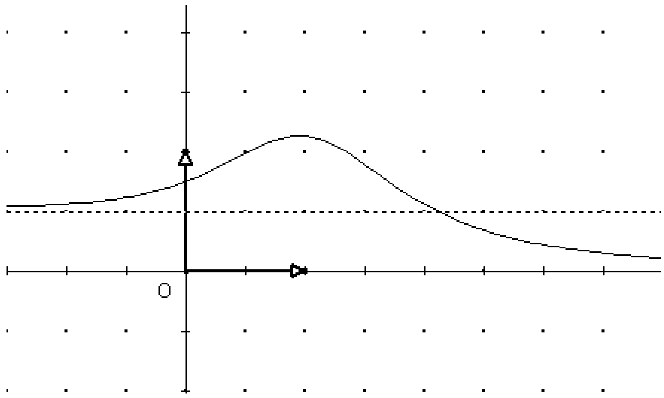
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 - 4 + \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x^3 - 8x}{2 - x}$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} -2x + 1 - \dfrac{6}{3 - x}$

Exercice n° 5. Donner par lecture graphique, la limite en $+\infty$ et en $-\infty$, des fonctions représentées.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots.$



$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ldots.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ldots.$